

$$(1) \sum \frac{n^{n+2}}{(n+1234)! \cdot (3n)^n} = a_n$$

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{(n+1)^{n+3}}{(n+1235)! \cdot \frac{(3n+3)!}{(n+2)! \cdot (2n+1)!}}}{\frac{n^{n+2}}{(n+1234)! \cdot \frac{3n}{(n+1)! \cdot (2n-1)!}}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{(n+1)^3}{n^3} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)2n^2}{(n+1235)(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^3 \frac{\overset{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)} \overset{2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)} \cdot 2}{\underset{1}{\left(1+\frac{1235}{n}\right)} \underset{3}{\left(3+\frac{3}{n}\right)} \underset{3}{\left(3+\frac{2}{n}\right)} \underset{3}{\left(3+\frac{1}{n}\right)}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{4e}{27} < 1 \text{ a řada konverguje (podílové krit.)} \end{aligned}$$

$$(2) \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{\log(n^n) \log(\log n) \log(\log(\log n))}$$

Položíme $g(x) = x \log x \cdot \log(\log x) \cdot \log(\log(\log x))$

Funkce x je monotónní a kladná na $(0, \infty)$. Dále $\log$ je monotónní a kladný na $(1, \infty)$ a $\lim_{x \rightarrow \infty} \log x = \infty$.

Tedy existuje $x_0 \in \mathbb{R}^+$, že funkce $\log x$, $\log(\log x)$ a $\log(\log(\log x))$ jsou kladné a rostoucí na $[x_0, \infty)$.

Celkově g je rostoucí na $[x_0, \infty)$ a dále $a_n = \frac{1}{g(n)}$ $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$.

Tedy $\sum a_n < \infty \Leftrightarrow \int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{g} < \infty$ (integrální kritérium)

Platí: $\int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{g} dx = \left| \begin{array}{l} t = \log(\log(\log x)) \\ dt = \frac{1}{x \log x \cdot \log(\log x)} dx \end{array} \right| = \int_{\log(\log(\log x_0))}^{\infty} \frac{1}{t} dt = \infty - \log(\log(\log x_0)) = \infty$

Celkem tedy $\boxed{\sum a_n = \infty}$